1. 20/11/2019

Esercizio 1 Verificare se

$f(x,y) = x \oplus y \Rightarrow (\overline{x \equiv y} \vee x)$ è una tautologia.

1. Tabella di verità

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \equiv y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$$f(0,0) = \underbrace{0 \oplus 0}_{0} \Rightarrow (\underbrace{\overset{1}{\overline{0 \equiv 0}} \vee 0}_{0}) = 1$$

2. Osserviamo che $x \Rightarrow y$ è 0 solamente quando $x = 1$ e $y = 0$.

Quando $x \oplus y \overset{?}{=} 1$? Quando $x \neq y$.

Ma quando $x \neq y$ $x \equiv y$ è sicuramente 0

Quindi $\overline{x \equiv y} = 1$ e dunque $\overline{x \equiv y} \vee x = 1$

$(X \oplus Y) \vee Z = (X \vee Z) \oplus (Y \vee Z)$ Esercizio 2

X $Z = Z \oplus Z$

X	Y	Z	$(X \oplus Y) \vee Z$	$(X \vee Z) \oplus (Y \vee Z)$	=
0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	1	1	
0	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	1	1	0	

Esercizio 3.

$$(x \oplus y) \vee (y \oplus z) \stackrel{?}{=} (x \oplus z) \vee (y \oplus z)$$

$x \oplus 0 = x$

$1 \qquad 1$

Poniamo $z = 0$

$$(x \oplus \underline{y}) \vee y = x \vee y$$

		LHS	RHS
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$\boxed{x \oplus 1 = \overline{x}}$

Poniamo $z = 1$

$$(x \oplus y) \vee \overline{y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

		LHS	RHS
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

~~[illegible]~~

1. $x \oplus y = \underline{(x \wedge \bar{y})} \vee (\bar{x} \wedge y)$

2. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge \overline{x \wedge y}$

		$x \oplus y$	$(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Funzioni di n variabili booleane.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dove $x_i \in \{0,1\}$ $i = 1, \dots, n$ e

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}$

Proposizione: Per ogni funzione booleana di n variabili booleane $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, esistono due funzioni $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ e $h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ booleane tali che

$$(*) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \wedge \bar{x}_n) \vee (h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \wedge x_n)$$

Proof.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = (g(x_1, \dots, x_{n-1}) \wedge 1) \vee (h(x_1, \dots, x_{n-1}) \wedge 0)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \Big(\underbrace{g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}_{} \wedge 1\Big) \vee \Big(\underbrace{h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}_{} \wedge 0\Big)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \vee\, 0 \longleftarrow$$

$$= g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \vee 0 = g(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$$

Dunque

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$$

Se metto $x_n = 1$ in $(*)$ ottengo invece

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) = \Big(g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \wedge 0\Big) \vee \Big(h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \wedge 1\Big)$$

$$= 0 \vee h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Quindi ho che

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$$

$\boxtimes$

Esercizio: Trovare g e h per la funzione di

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

11 00 1001 0000 1111

				f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1

				f
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

g

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$g(x_1, x_2, x_3)$
1
0
1

$h(x_1, x_2, x_3)$
1

$g(0,0,0) = f(0,0,0,0)$ | $h(0,0,0) = f(0,0,0,1)$

$g(0,0,1) = f(0,0,1,0)$

$\vdots$

(*) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overbrace{(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4)}^{\text{min term}} \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4)$

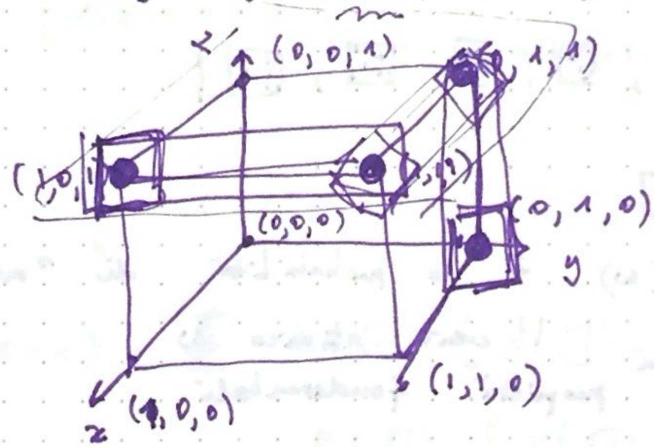
$\vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

* Full disjunctive normal form (forma disgiuntiva normale completa)

- $f(x,y,z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$ ←



f vale 1 solo sui vertici

$(1, 0, 1)$

$(0, 1, 1)$ } fanno parte di uno spigolo del cubo booleano

$(*, 1, 1)$ ← $(1, 1, 1)$

$y \wedge z$ $\quad (0, 1, 0)$

- $f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$

$(1, 0, 1) \quad (1, 1, 1) \rightarrow (1, *, 1)$

$(0, 1, 1) \quad (0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, *)$

$$f(x,y,z) = (x \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y)$$

Esercizio: Ridurre la funzione f in (* *) nella forma disgiuntiva normale "più corta".

- Accenni di calcolo delle probabilità

Ω : insieme degli eventi "atomici" o "fondamentali"

Lancio del dado (D6)

$$\Omega = \{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \}$$

$$\Pr : \Omega \to [0,1]$$

dove $\Pr(\omega)$ è la probabilità di "misurare" l'evento atomico ω

che deve avere una proprietà fondamentale

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) = 1$$

$(\Omega, \Pr)$ si chiama spazio di probabilità.

Random variable reali

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

X = # numero di pallini sulla faccia del dado.

$$X(⚀) = 1$$
$$X(⚁) = 2$$

Valore atteso (expectation value) di variabile random

$$\boxed{EX = \sum_{k} \Pr(X=k)\cdot k}$$

dove

$$\Pr(X=k) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega)\,[X(\omega)=k] \leftarrow$$

$$[A] = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ è vero} \\ 0 & \text{se } A \text{ è falso} \end{cases}$$

$$[X(\omega)=k] = \begin{cases} 1 & \text{se } X(\omega)=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Pr(⚀) = \frac{1}{6}, \quad \Pr(⚁) = \frac{1}{6}, \dots$$

$$\begin{aligned} \Pr(X=1) = {} & \Pr(⚀)\cdot[X(⚀)=1] \\ & + \Pr(⚁)\cdot[X(⚁)=1] \\ & + \Pr(⚂)\cdot[X(⚂)=1] \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\, 0 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \dots$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se \# pallini è pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Pr(X=1) = \frac{1}{6}\cdot \overset{0}{[X(⚀)=1]} + \frac{1}{6}\,\overset{1}{\overset{\shortparallel}{[X(⚁)=1]}}$$

$$+\ \frac{1}{6}\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{\left[X(\text{⚂})=1\right]}\ +\ \frac{1}{6}\underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{\left[X(\text{⚅})=1\right]}$$

$$+\ \frac{1}{6}\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{\left[X(\text{⚄})=1\right]}\ +\ \frac{1}{6}\underset{1}{\left[X(\text{⚃})=1\right]}\ *$$

$$=\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\ \frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$