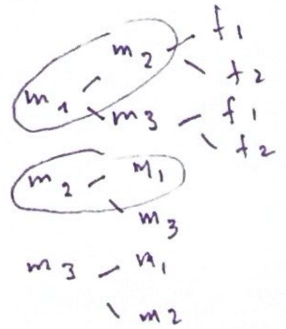
Esercizio 3 del 16 giugno 2014

Un gruppo di 12 persone composto da 8 maschi e 4 femmine. Quante sono le triple che si possono costruire con due maschi e 1 femmina assumendo di non ripetere quelle con le stesse persone?

Proviamo a capire il problema con numeri più piccoli

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$ $\quad F = \{f_1, f_2\}$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 6$$



$m_1 \; m_2 \; f_1$
$m_1 \; m_2 \; f_2$
$m_1 \; m_3 \; f_1$
$m_1 \; m_3 \; f_2$
$m_2 \; m_3 \; f_1$
$m_2 \; m_3 \; f_2$

Quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi di $\{m_1, m_2, m_3\}$?

$$\{m_1, m_2\}, \{m_2, m_3\}, \{m_1, m_3\}$$

In generale il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di n elementi è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{vale se } n, k \in \mathbb{R},\ n \geq k$$

Perché?

Iniziamo a scegliere i k elementi

Il primo elemento lo posso scegliere da n

" secondo " " " " " $n-1$

" k-esimo " " " " $n-(k-1) = n-k+1$

Quindi in totale ho

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ scelte dove però sto contando anche gli insiemi che differiscono solamente per una permutazione degli elementi.

Allora a questo numero devo "togliere" le permutazioni di k elementi

Quindi il numero che cerchiamo è

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

↳ numero delle perm. di k elementi

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Prop. Le permutazioni di k elementi sono $k!$

Proof. Esempio: 1 2 3 $(k=3)$

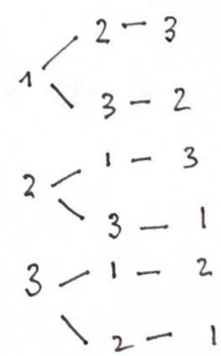
1 3 2

2 1 3

2 3 1

3 1 2

3 2 1



Proof. $k\,(k-1)\,(k-2)\cdots 2\cdot 1 = k!$.

scelte del primo elemento della perm

scelte del secondo elemento della perm

scelte dell'ultimo posto rimasto della permutazione.

∎

$\binom{8}{2}$ = # di scelte che posso fare per i maschi

$\binom{4}{1}$ = # di scelte per le femmine

$$\binom{8}{2} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\binom{4}{1}} = 112 \,.$$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{6!}}$$

Esercizio 4 del 16 giugno 2014

$$\{ \bar{t}, p \vee q, q \vee t, p \} \vdash p \wedge q \wedge \bar{t}$$

Le premesse per essere congiuntamente vere deve essere

$t = 0$ e $p = 1$

poichè per essere vero $q \vee t$ $q = 1$

è vero che $p \wedge q \wedge \bar{t}$ è vera quando $t = 0$, $p = 1$, $q = 1$, sì!

Esercizio 4 del 13 febbraio 2014

$$\{ \bar{u} \vee v, u \wedge r, v \vee t, s \vee t \} \vdash v$$

Avete visto che $\{ P_1, P_2, P_3 \dots \} \vdash Q$ è vera se e solo se

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \Rightarrow Q$$

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$(\bar{u} \vee v) \wedge (u \wedge r) \wedge (v \vee t) \wedge (s \vee t) \Rightarrow v$$

L'unico caso in cui può essere falsa è quando $v = 0$ e

$$(\bar{u} \vee v) \wedge (u \wedge r) \wedge (v \vee t) \wedge (s \vee t) \quad \text{è vera}$$

$$\bar{u} \wedge (u \wedge r) \wedge t \wedge (s \vee t) \quad (*)$$

~~$u=0$~~ ~~$t=1$~~

~~$u \wedge$~~

Per avere speranza che $(*)$ sia vera <u>deve</u> essere $u = 0$ per il primo termine, ma allora il secondo termine $u \wedge r$ è sicuramente falso e dunque tutto risulterebbe falso

Da questo segue che quando $v = 0$ le premesse non possono mai essere congiuntamente vere.

Indichiamo con $D_{n,k}$ il numero di disposizioni semplici di n oggetti a classe k. E' vero che

$$\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right)^2 > \frac{D_{n,k}}{n!} \quad ?$$

Cosa sono le disposizioni semplici di n oggetti a classe k?

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right)^2 > \frac{\cancel{n!}}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{\cancel{n!}} = \frac{1}{(n-k)!}$$

Assumiamo che $n \geq k$.

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

$\alpha = 3$

$k = 1$

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

$$3 + \underbrace{\frac{3!}{2! \cdot 1!}}_{=3} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$$

$\alpha = 5$

$k = 3$

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$$

$$\left(\binom{n}{k}\right)^2 > \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)^2 > \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\cancel{(n-k)!}\;\frac{(n!)^2}{(k!)^2\left((n-k)!\right)^{\cancel{2}}} > 1$$

$$\boxed{\left(\frac{n!}{k!}\right)^{*} \binom{n}{k}} > 1 \qquad \forall\, n \geq k \;? \qquad n \neq 1$$

Se $n = k$

$$\frac{n!}{n!}\binom{n}{n} = 1$$

$n = 1$

$k = 0$

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1!}{0!} = 1$$

Per $n = k$ <u>non</u> è vera

Lo è per ogni $n > k$ perché $n! > k!$ quindi

$$\frac{n!}{k!} > 1$$

$\binom{n}{k}$ con $n > k$ e $n \neq 1$ è ≥ 1

~~Quando $k=0$ $\binom{n}{0} = 1$~~

$$\frac{n!}{k!}\binom{n}{k} > 1$$

Se $n \geq k$ e $n \neq 1$ allora è vero.

Esercizio 1 del 28 Novembre 2014

Quanti bit sono necessari per rappresentare interi relativi nel range

$[-16, +15]$ con la codifica di complemento a 2?

Ad esempio se ho 4 bit

$0000 \rightarrow 0$

$0111 \rightarrow +7$

$1000 \rightarrow -8$

$\vdots$

$1111 \rightarrow -1$

$-7 \quad -3$

Se ho 5 bit

$00000 \rightarrow 0$

$\vdots$

$01111 \rightarrow +15$

$10000 \rightarrow -16$

$\vdots$

$11111 \rightarrow -1$

Quindi ne servono 5